

Совершенные призмoids и решетчатые многогранники Делоне

Марина Козачок¹, Александр Магазинов²

Аннотация

В данной работе доказано, что любой совершенный призмoid аффинно эквивалентен некоторому 0/1-многограннику, а также некоторому решетчатому многограннику Делоне.

1 Введение

В 1989 году Г.Калаи сформулировал 3^d -гипотезу:

Гипотеза Калаи. *У любого выпуклого центрально-симметричного d -мерного многогранника общее число граней всех размерностей не меньше 3^d .*

В случае $d = 3$ доказательство гипотезы легко следует из формулы Эйлера, а равенство достигается только на кубе и дуальном ему октаэдре. Для $d = 4$ гипотеза была доказана в 2007 г. Г.Циглером, Р.Саньялом и А.Вернером в [6]. Верна ли 3^d -гипотеза при $d \geq 5$ неизвестно.

Нетрудно проверить, что у многогранников Ханнера (см. [4]) ровно 3^d граней. Например, для любой размерности многогранниками Ханнера являются куб и дуальный ему кроссполитоп. Г.Калаи предположил, что многогранники Ханнера исчерпывают класс многогранников, на которых достигается равенство в 3^d -гипотезе. Однако этот вопрос остаётся открытым.

В пространстве размерности $d \leq 4$ доказана более сильная гипотеза (гипотеза В):

Гипотеза В. *Для любого центрально-симметричного многогранника P существует многогранник Ханнера H такой, что $f_k(P) \geq f_k(H)$ для любого k ($0 \leq k \leq d$), где f_k — число k -мерных граней соответствующего многогранника.*

Однако, при $d \geq 5$ гипотеза В не верна (см. [6]).

В связи с 3^d -гипотезой интерес представляет доказательство следующей ослабленной версии Гипотезы В:

Гипотеза. *Для любого центрально-симметричного многогранника P существует центрально-симметричный совершенный призмoid Q такой, что $f_k(P) \geq f_k(Q)$ для любого k ($0 \leq k \leq d$), где f_k — число k -мерных граней соответствующего многогранника.*

¹Математический институт им. Стеклова РАН; marina.kozachok@gmail.com

²Математический институт им. Стеклова РАН; magazinov-al@yandex.ru

Напомним, что центрально-симметричный совершенный призмOID — это центрально-симметричный многогранник, который является выпуклой оболочкой любой пары антиподальных граней. (Определение совершенного призмOIDа в общем случае дано ниже). В [10] доказано, что любой многогранник Ханнера является совершенным призмOIDом, но при $d \geq 5$ обратное уже не верно.

Основной результат данной работы — доказательство того, что любой совершенный призмOID аффинно эквивалентен некоторому решётчатому многограннику Делоне. В [7] доказано, что число аффинных типов решётчатых многогранников Делоне данной размерности конечно. Проведена классификация многогранников Делоне для размерностей $d \leq 6$ (см. [1], [8]), что позволяет классифицировать и все совершенные призмOIDы в этих размерностях.

2 Определения

Будем использовать следующие обозначения. Через $\text{conv } X$ обозначим выпуклую оболочку множества точек X в пространстве \mathbb{R}^d , через $\text{aff } X$ — *аффинную оболочку*, т.е. множество всех линейных комбинаций

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, \quad \text{где } a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \quad \text{и} \quad x_i \in X \quad (1 \leq i \leq n).$$

Наконец, через $\text{lin } X$ будем обозначать линейное пространство, ассоциированное с аффинной оболочкой $\text{aff } X$, т.е. множество всех линейных комбинаций

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, \quad \text{где } a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 \quad \text{и} \quad x_i \in X \quad (1 \leq i \leq n).$$

В данной работе рассматриваются многогранники в d -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^d . Выпуклый d -мерный многогранник P называется *призмOIDом*, если некоторая пара параллельных $(d-1)$ -мерных плоскостей содержит все его вершины. Примерами призмOIDов являются, в частности, пирамида, призма и антипризма.

Иначе говоря, призмOID P есть выпуклая оболочка $\text{conv}(F \cup F')$ двух многогранников F и F' , каждый из которых лежит в одной из двух параллельных гиперплоскостей. При этом $\dim(\text{lin } F + \text{lin } F') = \dim P - 1$, где $\text{lin } F + \text{lin } F'$ понимается как сумма линейных подпространств в объемлющем пространстве. Если $\dim P = d$ и $P \subset \mathbb{R}^d$, то две плоскости, параллельные $\text{lin } F + \text{lin } F'$ и проходящие через F и F' , являются опорными для P . Поэтому многогранники F и F' — грани многогранника P . При этом каждая вершина призмOIDа P принадлежит либо грани F , либо грани F' .

Пусть F — гипергрань многогранника P , и существует такая грань F' , что $\text{lin } F' \subseteq \text{lin } F$ и $P = \text{conv}(F \cup F')$ (в дальнейшем будем говорить, что такие грани *параллельны*). Тогда будем называть P *призмOIDом над гранью F* .

Многогранник P называется *совершенным призмOIDом*, если он является призмOIDом над любой своей гипергранью, т.е. для любой его гиперграни F выполняется $P = \text{conv}(F \cup F')$, где F' — параллельная к F грань, возможно, меньшей размерности.

Многогранник называется *0/1-многогранником*, если он является выпуклой оболочкой некоторого подмножества множества вершин единичного куба.

Пусть в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d задана некоторая решетка Λ . Пусть многогранник D вписан в шар B , причём внутренность шара B не содержит ни одной точки решетки Λ (∂B — пустая сфера по Делоне), а также выполнено условие

$$D = \text{conv}(\Lambda \cap \partial B).$$

Тогда D называется решетчатым многогранником Делоне (см. [9]).

3 Результаты

Предложение. Пусть P — совершенный призмод с N гипергранями. Тогда P можно задать системой линейных неравенств

$$b_i \geq (a_i, x) \geq c_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где гиперплоскость, содержащая i -ю гипергрань, задается уравнением $(a_i, x) = b_i$, и для любого $i = 1, 2, \dots, N$ и любой вершины $v \in P$ верно либо $(a_i, v) = b_i$, либо $(a_i, v) = c_i$.

Доказательство. Пусть гиперплоскость, содержащая гипергрань F_i , задается уравнением $(a_i, x) = b_i$, при этом можно считать (за счет выбора знака a_i), что P лежит в полупространстве $(a_i, x) \leq b_i$. По определению совершенного призмоида, $P = \text{conv}(F_i \cup F'_i)$, причем $\text{lin } F'_i \subseteq \text{lin } F_i$. Это значит, что грань F'_i лежит в гиперплоскости $(a_i, x) = c_i$, и $c_i < b_i$.

Поскольку любая вершина v призмоида P принадлежит либо гипергранни F , либо грани F' , верно либо $(a_i, v) = b_i$, либо $(a_i, v) = c_i$.

Так как выпуклый многогранник определяется своими гипергранями, то система неравенств $(a_i, x) \leq b_i$ уже определяет многогранник P . С другой стороны, любая вершина $v \in \text{Vert}(P)$ (где $\text{Vert}(P)$ — множество вершин многогранника P), удовлетворяет неравенству $(a_i, v) \geq c_i$, поскольку (a_i, v) принимает только значения b_i и c_i . Поэтому добавление неравенств $(a_i, x) \geq c_i$ не изменяет многогранник. \square

Теорема 1. Для любого d -мерного совершенного призмоида существует аффинно эквивалентный ему $0/1$ -многогранник, который получен из d -мерного единичного куба.

Доказательство. Пусть призмод P задан системой линейных неравенств $b_i \geq (a_i, x) \geq c_i$, (см. Предложение).

Среди линейных функций $\{a_i\}$ выберем d линейно независимых. Не умаляя общности, пусть это a_1, \dots, a_d . Многогранник, задаваемый системой неравенств

$$b_i \geq (a_i, x) \geq c_i, \quad i = 1, 2, \dots, d,$$

есть параллелепипед, который обозначим через Π .

По Предложению 3, для произвольной вершины v_j многогранника P и любого $i = 1, 2, \dots, d$ выполняется или $(a_i, v) = b_i$ или $(a_i, v) = c_i$. Следовательно v — вершина параллелепипеда Π . Таким образом, $\text{Vert}(P) \subseteq \text{Vert}(\Pi)$.

Сделаем аффинное преобразование, переводящее P в единичный куб $\{0, 1\}^d$. Тогда каждая вершина многогранника P перейдет в вершину куба. Следовательно, P перейдет в 0/1-многогранник. \square

Теорема 2. *Любой совершенный призмод аффинно эквивалентен некоторому решетчатому многограннику Делоне.*

Доказательство. Пусть P — d -мерный совершенный призмод. По Теореме 1, P аффинно эквивалентен 0/1-многограннику, полученному из d -мерного куба. Это значит, что в \mathbb{R}^d можно ввести такую аффинную систему координат, в которой все вершины многогранника P — целые точки.

Пусть v_1, \dots, v_k — все вершины P . Рассмотрим множество

$$\Lambda(P) = \left\{ u : u = \sum_{j=1}^k n_j v_j, \text{ где } n_j \in \mathbb{Z}, \sum_{j=1}^k n_j = 1 \right\}.$$

Множество $\Lambda(P)$ дискретно, поскольку все его точки целые в выбранной системе координат. Кроме того, параллельные переносы вида

$$m_1 v_1 + \dots + m_k v_k, \quad m_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^k m_i = 0$$

сохраняют $\Lambda(P)$ и образуют группу, транзитивно действующую на множество $\Lambda(P)$. Поэтому $\Lambda(P)$ — решетка.

Пусть призмод P задан системой линейных неравенств $b_i \geq (a_i, x) \geq c_i$ (см. Предложение).

Пусть $q_i(x) = (-b_i + (a_i, x))(-c_i + (a_i, x))$ — неоднородная функция второго порядка с квадратичной формой ранга 1. Для произвольной точки $u \in \Lambda(P)$ докажем, что $q_i(u) \geq 0$.

Действительно: $u = n_1 v_1 + \dots + n_k v_k$, где $n_1 + \dots + n_k = 1$ и $n_j \in \mathbb{Z}$. Тогда:

$$q_i(u) = \left(-b_i + \sum_{j=1}^k n_j (a_i, v_j) \right) \left(-c_i + \sum_{j=1}^k n_j (a_i, v_j) \right).$$

Далее:

$$\sum_{j=1}^k n_j (a_i, v_j) = (n_{j_1} + \dots + n_{j_l}) b_i + (n_{j_{l+1}} + \dots + n_{j_k}) c_i = p b_i + (1-p) c_i, \text{ где } p = n_{j_1} + \dots + n_{j_l} \in \mathbb{Z}$$

Пусть $p < 0$. Тогда перепишем: $p b_i + (1-p) c_i = c_i + (-p) \cdot (c_i - b_i)$. Поскольку $c_i < b_i$, имеем $(-p) \cdot (c_i - b_i) < 0$. В результате $p b_i + (1-p) c_i < c_i$ и тем более $p b_i + (1-p) c_i < b_i$. Следовательно, обе скобки в $q_i(u)$ отрицательны. Таким образом $q_i(u) > 0$.

Пусть $p = 0$. Тогда $p b_i + (1-p) c_i = c_i$. Значит, $q_i(u) = 0$.

Пусть $p = 1$. Тогда $p b_i + (1-p) c_i = b_i$. Значит, $q_i(u) = 0$.

Пусть $p > 1$. Тогда перепишем: $pb_i + (1 - p)c_i = b_i + (1 - p)(b_i - c_i)$, что верно. Поскольку $c_i < b_i$, имеем $(1 - p)(b_i - c_i) > 0$. В результате $pb_i + (1 - p)c_i > b_i$ и тем более $pb_i + (1 - p)c_i < c_i$. Следовательно, обе скобки в $q_i(u)$ положительны. Таким образом $q_i(u) > 0$.

Рассмотрим квадратичную функцию

$$Q(x) = \sum_{i=1}^N q_i(x).$$

Легко видеть, что $Q(x)$ — неоднородная функция второго порядка с положительно определенной однородной составляющей.

Для любой точки u решетки $\Lambda(P)$ имеем $q_i(u) \geq 0$, а следовательно, и $Q(u) \geq 0$. Более того, если $Q(u) = 0$, то $q_i(u) = 0$ для любого $i = 1, 2, \dots, N$.

Условие $q_i(u) = 0$ эквивалентно альтернативе: либо $(a_i, u) = b_i$, либо $(a_i, u) = c_i$. Поэтому если u — вершина многогранника P , то, в силу Предложения, $Q(u) = 0$. Поэтому уравнение $Q(x) = 0$ определяет пустой эллипсоид, описанный вокруг P .

Осталось показать, что $Q(u) \neq 0$ при всех $u \in \Lambda(P) \setminus \text{Vert}(P)$. Предположим противное: $Q(u) = 0$, $u \in \Lambda(P) \setminus \text{Vert}(P)$. Поскольку u лежит на поверхности эллипсоида, описанного вокруг P , u находится строго вне P . Тогда для некоторого i верно $(a_i, u) > b_i$. Но тогда $q_i(u) > 0$ и $Q(u) > 0$, противоречие.

Переводя аффинным преобразованием эллипсоид $Q(u) = 0$ в сферу, убеждаемся, что P аффинно эквивалентен решетчатому многограннику Делоне.

□

Список литературы

- [1] M.Dutour, *The six-dimensional Delaunay polytopes*, European Journal of Combinatorics, **25:4** (2004), 535–548
- [2] R.M. Erdahl, S.S. Ryshkov, *The empty sphere I*, Canad. J. Math., **39:4** (1987), 794–824.
- [3] R.M. Erdahl, S.S. Ryshkov, *The empty sphere II*, Canad. J. Math., **40:5** (1988), 1058–1073.
- [4] O.Hanner *Intersections of translates of convex body*, Math. Scand. **4** (1956), 67–89
- [5] G.Kalai *The Number of Faces of Centrally-symmetric Polytopes*, Graphs and Combinatorics **5** (1989), 389–391
- [6] R.Sanyal, A.Werner, G.Ziegler *On Kalai's conjectures about centrally symmetric polytopes*, Discrete Comput. Geometry **41** (2009), 183–198
- [7] G.F. Voronoï, *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième Mémoire: Recherches sur les paralléloèdres primitifs*, J. für die reine und angewandte Mathematik, **134** (1908), 198–287, **136** (1909) 67–181.

- [8] Е.П. Барановский, *Условия, при которых симплекс 6-мерной решетки является L -симплексом*, Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 2 (1999), 18–24
- [9] Б.Н. Делоне, *Геометрия положительных квадратичных форм*, УМН (1937), выпуск 3, 16–62
- [10] М. Козачок, *Совершенные призматиды и гипотеза о минимальном числе граней центрально-симметричных многогранников*, Модел. и анализ информ. систем, Т.19, №6 (2012), 137–147